Демо-версия: Математика 9-10 класс, 2021-22 год.

(Тур длится 240 минут. Итогом является сумма баллов по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; если эта сумма больше 100, то итоговой оценкой считается 100 баллов. Баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

10 1. В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце - снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?

15 2. Для натуральных чисел a и b через $[a, b]$ и (a, b) будем обозначать наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель соответственно чисел a и b. Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство

$$4\sum_{k=1}^{n}[n,k] = 1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) + 2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

20 3. Дан ABC остроугольный неравнобедренный треугольник ABC и его описанная окружность Γ. Внутри ABC выбрана точка R и на отрезках AR, BR, CR как на диаметрах построены окружности, вторично пересекающие Γ в точках X_A, X_B и X_C соответсвенно. Через точки A, B, C проведены прямые, ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, перпендикулярные AX_A, BX_B и CX_C соответственно. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C проходят через одну точку.

28 4. Сережа задумал натуральное число n, не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1. Затем, на i-ом шаге ($i = 2; 3; \ldots$) он делит число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ с остатком на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i. Докажите, что $\overline{0,q_1q_2q_3\ldots} = \frac{n}{2019}$.

42 5. В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n – натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Роботу можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника – робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

55 6. Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.